



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : ESSEC

OPTION LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

Filière B/L

MATHEMATIQUES

Mercredi 10 mai 2006, de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'exercice et le problème qui suivent sont totalement indépendants.

Exercice

Notations et conventions: Soit un réel a et n un entier supérieur ou égal à 3. On considère $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n . On note $P^{(k)}$ la dérivée k -ième de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec comme convention $P^{(0)} = P$. D'autre part on pose $0! = 1$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit le polynôme $f(P)$ par

$$f(P)(X) = (X - a)(P^{(1)}(X) + P^{(1)}(a)) - 2(P(X) - P(a)).$$

1. Calculer $f(1)$, $f(X - a)$ et $f((X - a)^2)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul de degré d et de coefficient dominant c_d . Calculer $P^{(d)}$.
3. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que

$$P(x) = \sum_{k=0}^m \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} P^{(m+1)}(t) dt.$$

5. En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

6. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que

$$f(P)(X) = \sum_{k=3}^n \frac{(k-2)}{k!} P^{(k)}(a) (X-a)^k.$$

7. En déduire les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Problème

Notations: si a et b sont deux nombres réels, on désigne par $a \wedge b$ le plus petit de ces deux nombres et par $a \vee b$ le plus grand de ces deux nombres. Tout au long du problème $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé et les variables aléatoires utilisées plus bas seront toutes définies sur cet espace probabilisé.

Partie I (Distance en variation)

Dans cette première partie on considère un ensemble discret \mathcal{K} dont on suppose qu'il est soit fini soit égal à l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} . \mathcal{A} désigne l'ensemble de toutes les parties de \mathcal{K} et pour tout $A \in \mathcal{A}$, on note \bar{A} le complémentaire de A dans \mathcal{K} .

Soient P et Q deux lois de probabilité sur \mathcal{K} . Pour tout $k \in \mathcal{K}$, on pose $p_k = P(\{k\})$ et $q_k = Q(\{k\})$. On rappelle que $p_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathcal{K}$ avec $\sum_{k \in \mathcal{K}} p_k = 1$. De plus toute probabilité P est entièrement déterminée par la donnée de $(p_k)_{k \in \mathcal{K}}$ puisque pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \sum_{k \in A} p_k$.

Lorsque \mathcal{K} est fini on définit la **distance en variation** entre les probabilités P et Q par

$$D(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k|. \quad (\text{i})$$

I. 1) Lorsque $\mathcal{K} = \{0, 1\}$, exprimer $D(P, Q)$ en fonction de p_1 et q_1 .

I. 2) Lorsque $\mathcal{K} = \mathbb{N}$, vérifier que la série de terme général $(|p_k - q_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente.

On étend donc la définition de la distance en variation donnée par (i) au cas où $\mathcal{K} = \mathbb{N}$.

I. 3) Vérifier que $|P(A) - Q(A)| \in [0, 1]$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

I. 4) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$2|P(A) - Q(A)| = \left| \sum_{k \in A} (p_k - q_k) \right| + \left| \sum_{k \in \bar{A}} (p_k - q_k) \right|.$$

I. 5) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$|P(A) - Q(A)| \leq D(P, Q). \quad (\text{ii})$$

I. 6) Montrer que la partie $A_0 = \{k \in \mathcal{K} : q_k \geq p_k\}$ réalise l'égalité dans (ii), c'est à dire que

$$|P(A_0) - Q(A_0)| = D(P, Q).$$

I. 7) Démontrer la formule

$$D(P, Q) = 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}} (p_k \wedge q_k).$$

I. 8) On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que X soit de loi P et Y soit de loi Q . Autrement dit, pour tout $k \in \mathcal{K}$

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k \text{ et } \mathbb{P}(Y = k) = q_k.$$

Montrer que $D(P, Q) \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$.

Partie II (Couplage binomiale-Poisson)

Soit n un entier strictement positif et λ un réel strictement positif, strictement plus petit que n . L'objet de cette deuxième partie est d'étudier un exemple: l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson en terme de **distance en variation**. Plus précisément, si d'une part $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ désigne la loi binomiale de paramètres n et λ/n et si d'autre part on note $\mathcal{P}(\lambda)$ la loi de Poisson de paramètre λ , le but est de prouver la majoration suivante:

$$D(\mathcal{B}(n, \lambda/n), \mathcal{P}(\lambda)) \leq \frac{\lambda^2}{n} \quad (\text{iv})$$

où D est définie au (i).

II. 1) Soit Y_1, \dots, Y_n n variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ/n , donner sans démonstration la loi de $\sum_{i=1}^n Y_i$.

II. 2) Vérifier que pour tout $x \in [0, 1]$

$$f(x) = 1 - (1 - x) \exp(x)$$

appartient à $[0, 1]$.

Soit U_1, \dots, U_n n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $f(\lambda/n)$. On suppose que les variables U_1, \dots, U_n sont indépendantes des variables Y_1, \dots, Y_n de la question II. 1). Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $X_i = 0$ si $U_i = Y_i = 0$ et $X_i = 1$ sinon.

II. 3) Vérifier que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre λ/n et donner la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$.

II. 4) Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}.$$

(On pourra établir que pour tout x réel $1 + x \leq \exp(x)$).

II. 5) Montrer que

$$\mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i \right) \leq P \left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i \neq Y_i\} \right).$$

II. 6) En déduire que

$$\mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i \right) \leq \frac{\lambda^2}{n},$$

puis conclure quant à (iv).

II. 7) Quel résultat connu peut-on déduire de (iv) lorsque n tend vers l'infini?

Partie III (Couplage optimal)

Le but de cette troisième partie est de compléter le résultat obtenu au I. 8). On reprend donc les notations de la partie I (Distance en variation). On souhaite construire un couple (X, Y) de variables aléatoires telles que X soit de loi P , Y soit de loi Q et $\mathbb{P}(X \neq Y) = D(P, Q)$. Pour plus de simplicité on pose $\theta = D(P, Q)$ et on suppose que $\theta \in]0, 1[$.

On considère quatre variables aléatoires indépendantes X_0, X_1, Y_1 et Z dont les lois sont spécifiées ci-dessous. X_0, X_1 et Y_1 sont à valeurs dans \mathcal{K} avec

$$\mathbb{P}(X_0 = k) = \frac{1}{1 - \theta} (p_k \wedge q_k),$$

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{\theta} ((p_k - q_k) \vee 0),$$

$$\mathbb{P}(Y_1 = k) = \frac{1}{\theta} ((q_k - p_k) \vee 0),$$

pour tout $k \in \mathcal{K}$ et Z est une variable de Bernoulli de probabilité de succès θ . On définit le couple (X, Y) de la manière suivante: $(X, Y) = (X_1, Y_1)$ si $Z = 1$ et $(X, Y) = (X_0, X_0)$ si $Z = 0$.

III. 1) Prouver que X a pour loi P tandis que Y a pour loi Q .

III. 2) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = Y_1)$.

III. 3) Conclure.