

CONCOURS D'ADMISSION DE 2004

Option Lettres et Sciences Humaines

Épreuve ENS B/L

MATHÉMATIQUES

Jeudi 6 mai 2004 de 8h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E_n = \{1, 2, \dots, n\} = \llbracket 1, n \rrbracket$ et Ω l'ensemble des permutations sur E_n . Pour tout ensemble fini A , on note $\text{card}(A)$ son cardinal, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

On note $\binom{n}{k}$, ou C_n^k , le nombre $\begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On admet enfin la formule suivante, dite formule de Poincaré : soit A un ensemble de cardinal fini, et A_1, A_2, \dots, A_n , des sous-ensembles de A . Alors

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Par exemple :

$$\text{card}(A_1 \cup A_2) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) - \text{card}(A_1 \cap A_2)$$

ou

$$\begin{aligned} \text{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \text{card}(A_3) \\ &\quad - \text{card}(A_1 \cap A_2) - \text{card}(A_1 \cap A_3) - \text{card}(A_2 \cap A_3) + \text{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

Partie I

1. Rappeler la valeur de $\text{card}(\Omega)$.

Pour tout $i \in E_n$, on pose $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega(i) = i\}$.

2. Montrer que, pour tout $k \in E_n$ et pour tout i_1, i_2, \dots, i_k tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

$$\text{card} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) = (n-k)!$$

En déduire, pour tout $k \in E_n$, la valeur de

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

3. On note

$$D_{n,0} = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in E_n, \omega(i) \neq i\}$$

a) Montrer que

$$d = \text{card}(D_{n,0}) = n! - \text{card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = n! \left(\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \right)$$

Pour tout $k \in E_n$, on appelle $D_{n,k}$ l'ensemble formé des $\omega \in \Omega$ tels qu'il existe i_1, i_2, \dots, i_k tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ et tel que pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, on a $\omega(i_j) = i_j$, et pour tout $\ell \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, on a $\omega(\ell) \neq \ell$.

b) Montrer que pour tout $k \in E_n$

$$d_k = \text{card}(D_{n,k}) = \binom{n}{k} \text{card}(D_{n-k,0})$$

c) Montrer que pour tout $k \in E_n$

$$d_k = s_k - \binom{k+1}{k} s_{k+1} + \binom{k+2}{k} s_{k+2} + \dots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} s_n$$

4. On pose $d_0 = s_0 = 0$.

a) Écrire la matrice du système d'équations qui donne (d_0, d_1, \dots, d_4) en fonction de (s_0, s_1, \dots, s_4) .

b) Montrer que cette matrice est inversible et déterminer son inverse.

(on pourra se placer dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_5[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 5 et donner l'expression de l'endomorphisme représenté, dans la base canonique, par cette matrice, ou utiliser toute autre méthode)

c) En déduire l'expression de s_4 en fonction de (d_0, d_1, \dots, d_4) .

Partie II

Afin de lancer un nouveau produit sur le marché, le service marketing d'une entreprise propose au directeur général la campagne suivante :

- mettre en vente au prix unitaire de b Euros, n exemplaires du produit,
- chaque exemplaire sera numéroté de façon apparente d'un nombre compris entre 1 et n ,
- à l'intérieur de chaque exemplaire du produit, et de façon cachée, se trouve un second numéro,
- l'acheteur qui trouvera à l'intérieur de l'exemplaire un numéro identique à celui figurant à l'extérieur gagnera B Euros.

On suppose que les numéros cachés sont tous différents, sont compris entre 1 et n et choisis au hasard.

Avant de donner son accord, le directeur général souhaite étudier le « coût » d'une telle campagne.

Afin de formaliser la notion de choix au hasard, et pour toute la suite du problème, on munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme P définie pour tout $A \subseteq \Omega$ par

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Enfin, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de gagnants.

1. a) En utilisant les résultats de la question I. 3, déterminer la loi de X_n .

b) Établir les égalités suivantes

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = 1$$

(on justifiera de manière précise l'interversion des deux signes sommes)

2. Pour tout $A \subseteq \Omega$, on note 1_A la variable aléatoire définie par

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier l'égalité

$$X_n = 1_{A_1} + 1_{A_2} + \dots + 1_{A_n}$$

et en déduire l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n .

3. a) Montrer que

$$X_n^2 = \sum_{i=1}^n 1_{A_i} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} 1_{A_i \cap A_j}$$

b) En déduire la variance $V(X_n)$ de la variable aléatoire X_n .

4. a) Montrer que le coût aléatoire de l'opération pour l'entreprise est donné par

$$C_n = nb - BX_n$$

En déduire le coût moyen $E(C_n)$, ainsi que le risque donné par l'écart type $\sigma(C_n)$.

b) Quelle sera, d'après vous, la réponse du directeur général?

5. Montrer que le gain d'un acheteur ayant acquis un seul produit est donné par

$$G_n = BY_n - b$$

où Y_n est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/n$. En déduire le gain moyen de l'acheteur.

Partie III

1. Soit Z une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$. Montrer que pour tout k fixé, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(Z = k)$$

2. Montrer que pour tout $k \in E_n$

$$\left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| = \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right|$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} \leq \frac{2}{m!}$$

(on remarquera que pour tout $k \geq 1$, $m(m+1) \cdots (m+k-1) \geq m^k$)

4. En déduire que

$$\sum_{k=0}^n \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leq 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k+1)!} \leq \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$$

Partie IV

On suppose dans cette partie qu'un acheteur a acquis 2 exemplaires du produit. L'ensemble de ces exemplaires est noté $L = \{j_1, j_2\}$.

On note $Y_n^{[2]}$ la variable aléatoire égale au nombre d'exemplaires gagnants.

1. a) En suivant un raisonnement identique à celui de la première partie, montrer que

$$\text{card}(\{\omega \mid Y_n^{[2]}(\omega) = k\}) = \binom{2}{k} \text{card}(\{\omega \mid Y_{n-k}^{[2-k]}(\omega) = 0\})$$

b) En déduire que

$$P(Y_n^{[2]} = k) = \frac{1}{k!} \frac{\binom{2}{k}}{\binom{n}{k}} P(Y_{n-k}^{[2-k]} = 0)$$

2. Montrer que

$$P(Y_n^{[2]} = 0) = 1 - P\left(\bigcup_{i \in L} A_i\right)$$

3. Montrer que

$$P\left(\bigcup_{i \in L} A_i\right) = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \binom{2}{i} \frac{(n-i)!}{n!}$$

4. En déduire que

$$P(Y_n^{[2]} = k) = \frac{1}{k!} \frac{\binom{2}{k}}{\binom{n}{k}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-k} (-1)^{i+1} \binom{2-k}{i} \frac{(n-k-i)!}{(n-k)!}\right)$$

5. Montrer que l'espérance $E(Y_n^{[2]})$ est égale à $\frac{2}{n}$ et que la variance $V(Y_n^{[2]})$ est égale à $\frac{2}{n} - \frac{2(n-2)}{n^2(n-1)}$.

(on pourra utiliser une méthode identique à celle de la question II.2)

6. a) Montrer que le gain de l'acheteur est égal à $G_n = BY_n^{[2]} - 2b$.

b) Déterminer son gain moyen, ainsi que l'écart type de ce gain.

c) Du point de vue de l'acheteur, est-il très intéressant d'acquérir deux exemplaires du produit ?