

## CONCOURS D'ADMISSION DE 2003

### Option économique

### MATHEMATIQUES III

Lundi 19 mai de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

#### Exercice 1 : suites récurrentes et algèbre linéaire

Soit  $a$  un nombre réel. On note  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites réelles définies sur  $\mathbb{N}$ , et  $F$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  formé des suites  $(u_n)$  qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3a u_{n+1} + (1-3a)u_n.$$

L'objet de ce problème est l'étude de l'ensemble  $F$ .

#### I. Étude du cas particulier $a = 1$

Soit  $(u_n)$  la suite définie par ses trois premiers termes  $u_0, u_1, u_2$ , et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ , et on note  $M$  la matrice carrée  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

#### 1. Reconnaître, pour tout entier naturel $n$ , le produit $MX_n$ .

En déduire l'expression de  $X_n$  en fonction des matrices  $M$ ,  $X_0$  et de l'entier naturel  $n$ .

2. a) Déterminer les valeurs propres de la matrice  $M$  et leur sous-espace propre associé.

b) La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

3. On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $M$ , c'est-à-dire tel que  $M$  soit la matrice de  $f$  dans la base canonique  $B$  de  $\mathbb{R}^3$ .

a) Déterminer une base  $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  telle que la matrice  $T$  de  $f$  dans  $B'$  vérifie :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et que les vecteurs  $e'_1, e'_2, e'_3$  aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

b) Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $T^n$ .

4. Soit  $P$  la matrice de passage de la base  $B$  à la base  $B'$ .

Exprimer  $M$  en fonction de  $T$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ , puis  $M^n$  en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel  $n$ .

5. a) Calculer  $P^{-1}$  (les calculs devront figurer sur la copie).

b) Pour tout entier naturel  $n$ , calculer les coefficients de la première ligne de  $M^n$ ; en déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et de l'entier naturel  $n$ .

## II. Étude du cas général

On revient au cas général où  $a$  est un réel quelconque.

### 1. Structure de $F$

a) Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^N$ .

b) On considère l'application  $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(u_n) \mapsto (u_0, u_1, u_2)$ .

Démontrer que  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels; en déduire que  $F$  est de dimension finie et préciser sa dimension.

c) Justifier que des suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ ,  $(w_n)$  de  $F$  forment une base de  $F$  si, et seulement si, la

matrice  $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}$  est inversible.

d) On suppose dans cette question :  $a = 0$ .

On note  $s$ ,  $s'$ ,  $s''$  les suites définies par :  $s = \varphi^{-1}((1, 0, 0))$ ,  $s' = \varphi^{-1}((0, 1, 0))$ ,  $s'' = \varphi^{-1}((0, 0, 1))$ .

Déterminer  $s$ ,  $s'$ ,  $s''$  (on donnera les dix premiers termes de chacune de ces trois suites); en déduire la forme générale d'un élément de  $F$ .

e) Reprendre la question précédente dans le cas  $a = \frac{1}{3}$ .

### 2. Suites géométriques de $F$

a) Démontrer que la suite  $(r^n)$  appartient à  $F$  si, et seulement si, le réel  $r$  est racine de la fonction polynomiale  $p : x \mapsto x^3 - 3ax + 3a - 1$  (avec la convention :  $0^0 = 1$ ).

b) Déterminer, en fonction du réel  $a$ , le nombre de racines de la fonction  $p$  ainsi que leur valeur.

### 3. Cas où $p$ admet trois racines distinctes

a) Démontrer que, lorsque la fonction  $p$  admet trois racines distinctes  $1$ ,  $r_1$  et  $r_2$ , les suites  $(1)$ ,  $(r_1^n)$  et  $(r_2^n)$  forment une base de l'espace vectoriel  $F$ .

b) Dans le cas où  $a = 7$ , exprimer, en fonction de l'entier naturel  $n$ , le terme général  $u_n$  de la suite appartenant à  $F$  qui vérifie :  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 10$ ,  $u_2 = -8$ .

### 4. Cas où $p$ admet une racine double

a) Soit  $r$  un nombre réel et  $(u_n)$  la suite de terme général  $nr^n$ .

Démontrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+3} - 3au_{n+1} - (1-3a)u_n = r^n [n p(r) + r p'(r)]$ .

b) En déduire que, lorsque  $p$  admet une racine double  $r_0$  et une racine simple  $r_1$ , la suite  $(nr_0^n)$  appartient à  $F$ , et démontrer que les suites  $(r_0^n)$ ,  $(nr_0^n)$  et  $(r_1^n)$  forment une base de  $F$ .

c) Dans le cas où  $a = \frac{1}{4}$ , exprimer le terme général  $u_n$  d'un élément quelconque  $(u_n)$  de  $F$  en fonction de  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et de l'entier naturel  $n$ ; préciser la limite de  $(u_n)$ .

## Exercice 2 : probabilités et simulation informatique

### I. Exemple introductif

On effectue des lancers successifs (indépendants) d'un dé cubique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note  $X_1, X_2, \dots$  les variables aléatoires donnant le numéro amené par le dé aux premiers lancers, deuxième lancer, ... .

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $Y_n$  la somme des points obtenus aux  $n$  premiers lancers.

Enfin, pour tout entier naturel  $k$  non nul, la variable aléatoire  $T_k$  compte le nombre de celles des variables aléatoires  $Y_1, Y_2, \dots$  qui prennent une valeur inférieure ou égale à  $k$ .

Par exemple, si les cinq premiers numéros amenés par le dé sont, dans l'ordre : 3, 1, 2, 3, 6, alors les événements suivants sont réalisés :  $(Y_1 = 3)$ ,  $(Y_2 = 4)$ ,  $(Y_3 = 6)$ ,  $(Y_4 = 9)$ ,  $(Y_5 = 15)$ , et les variables aléatoires  $T_2, T_3, T_9$  et  $T_{12}$  prennent respectivement pour valeurs 0, 1, 4 et 4.

1. On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire  $T_{12}$ .

a) Donner les valeurs prises par  $T_{12}$  (on explicitera un exemple de résultat correspondant à chacune des deux valeurs extrêmes). Quelle est la probabilité que  $T_{12}$  prenne la valeur 12 ?

#### b) Simulation informatique

Compléter les lignes marquées par des symboles `+++` du programme **Pascal** ci-contre, de façon qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur de  $T_{12}$  (on rappelle que `random(6)` fournit un entier aléatoire parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5).

```
program Essec2003A;
var x,y,t:integer;
begin
  randomize;
  y:=0;
  t:=0;
  repeat
    x:= random(6)+1 ;
    y:= ++++++ ;
    t:= ++++++ ;
  until ++++++ ;
  writeln('T = ',t);
end.
```

2. On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire  $T_2$ .

a) Déterminer la loi de probabilité de  $T_2$ .

b) Qu'obtient-on à l'affichage en exécutant le programme ci-dessous ?

```
program Essec2003B;
var i,d1,d2:integer;
    loi:array[0..2] of integer;
begin
  for i:=0 to 2 do loi[i]:=0;
  for d1:=1 to 6 do
    for d2:=1 to 6 do
      if d1>2 then loi[0]:=loi[0]+1
        else if d1+d2>2 then loi[1]:=loi[1]+1
          else loi[2]:=loi[2]+1;
  for i:=0 to 2 do write(loi[i]/36,' ');
end.
```

Dorénavant, on considère une suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ , mutuellement indépendantes, de même loi, à valeurs positives ou nulles.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose alors :  $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ ,

et on note  $F_n$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Y_n$ .

On fixe un réel strictement positif  $x$ , et on s'intéresse au nombre  $T_x$  des variables aléatoires  $Y_n$  telles que l'événement  $(Y_n \leq x)$  soit réalisé.

## II. Cas général

1. Démontrer que la suite  $(F_n(x))_{n \geq 1}$  est décroissante.

2. Démontrer chacune des deux relations suivantes :

➤  $P(T_x = 0) = 1 - F_1(x)$  ;

➤ pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $P(T_x = n) = F_n(x) - F_{n+1}(x)$ .

3. En déduire l'équivalence :  $\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_x = n) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$ .

(Autrement dit,  $T_x$  est une variable aléatoire si, et seulement si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$ .)

## III. Cas d'une loi géométrique

Dans cette troisième partie, les variables aléatoires  $X_i$  suivent la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$  de paramètre  $p$  ( $0 < p < 1$ ), et on pose :  $q = 1 - p$ . De plus,  $x$  est ici un entier naturel non nul fixé.

On rappelle que, par convention :  $C_n^m = 0$  si  $n$  et  $m$  sont des entiers naturels tels que  $m > n$ .

1. **Loi de  $Y_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )**

a) Préciser  $Y_n(\Omega)$ .

b) Par un calcul de loi de somme, déterminer la loi de  $Y_2$ , puis celle de  $Y_3$ .

c) Démontrer que, pour tous entiers naturels  $m$  et  $n$  tels que  $m \geq n$ , on a l'égalité :  $\sum_{k=n}^m C_k^n = C_{m+1}^{n+1}$ .

d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$P(Y_n = k) = C_{k-1}^{n-1} q^{k-n} p^n \quad \text{si } k \text{ est un entier supérieur ou égal à } n.$$

2. **Calcul de  $P(T_x = n)$**

a) Justifier que  $T_x$  est une variable aléatoire et préciser  $T_x(\Omega)$ . Calculer  $P(T_x = 0)$ .

b) Vérifier chacune des deux égalités :

$$F_n(x) = p^n \sum_{k=n}^x C_k^n q^{k-n} - qp^n \sum_{k=n+1}^x C_{k-1}^n q^{k-n-1}, \quad F_{n+1}(x) = p^{n+1} \sum_{k=n+1}^x C_{k-1}^n q^{k-n-1}.$$

En utilisant **II. 2.**, en déduire le calcul de  $P(T_x = n)$  pour  $n$  entier supérieur ou égal à 1.

c) Reconnaître la loi de  $T_x$  ; préciser son espérance et sa variance.

3. Sachant que les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots$  sont des temps d'attente, et en observant que la réalisation de  $n$  premiers succès équivaut à la réalisation du  $n$ -ième succès, donner une interprétation (soigneusement exposée) de chacune des variables aléatoires  $Y_n$  et  $T_x$ , et retrouver ainsi la loi de  $T_x$ .

## IV. Cas d'une loi exponentielle

Dans cette dernière partie, les variables aléatoires  $X_i$  suivent la loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). On admettra qu'alors  $Y_n$  admet pour densité la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f_n(t) = 0 & \text{si } t < 0, \\ f_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1. À l'aide de **II. 2**, calculer  $P(T_x = 0)$ , puis  $P(T_x = n)$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

2. Reconnaître la loi de  $T_x$  ; préciser son espérance et sa variance.

\*\*\*