CONCOURS D'ADMISSION DE 2003

Option lettres et sciences humaines
Epreuve E.N.S. B/L

MATHEMATIQUES

Lundi 12 mai 2003 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE *Les probabilités au secours de Persée*
Persée est à la recherche de son épouse Andromède qu'un dieu malveillant a enfermée dans une caverne. Malheureusement, il y a trois cavernes identiques : dans l'une se trouve Andromède mais dans chacune des deux autres se trouve une gorgone au regard pétrifiant.
Zeus intervient : « Mon fils, je sais dans quelle caverne Andromède se trouve mais je ne peux pas te le dire. Toutefois je peux t'aider. *Une fois que tu auras choisi une caverne*, je peux t'indiquer parmi les deux cavernes restantes, une caverne où il y a une gorgone et je te conseille alors de modifier ton choix initial. »
Persée : « Ô père cruel, que je change ou non mon choix, il y a toujours une chance sur deux que je sois transformé en pierre ! »
Zeus : « Persée, la mathématique est meilleure conseillère que la colère ! »

Quelle est la probabilité que Persée trouve Andromède si Persée ne modifie pas son choix ?
Quelle est la probabilité que Persée trouve Andromède si Persée modifie son choix ?
Que lui conseillez-vous ?

PROBLÈME *L'objectif du problème est d'étudier les rudiments de la* théorie de la communication *- ou théorie de l'information - introduite en 1948 par Claude Shannon.*

Définitions et notations

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.
- φ est la fonction définie sur $]0,1]$ par $x \mapsto \varphi(x) = -\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.
- Pour un événement A de probabilité non nulle, on pose $i(A) = \varphi(P(A))$.
- h est la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$h(0) = 0 \qquad \text{et pour } x \in]0,1], \quad h(x) = -x\,\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

- Pour une variable aléatoire X discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs réelles, on pose sous réserve d'existence :

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x))$$

- Si X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, alors $H(X)$ existe et, en notant $p_k = P(X = x_k)$, on a :

$$H(X) = \sum_{k=1}^{n} h(P(X = x_k)) = \sum_{k=1}^{n} h(p_k)$$

Remarque : En théorie de l'information, $i(A)$ est appelé incertitude de l'événement A *et* $H(X)$ *est l'*incertitude moyenne *- ou* entropie *- de* X.

Partie I *Incertitude des événements*

I.1°) On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement « la carte tirée est la dame de cœur ».
Que valent $P(A)$ et $i(A)$?

I.2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce équilibrée.
A est l'événement « obtenir n fois PILE ». Préciser $i(A)$.

I.3°) Vérifier les points suivants :

(i) Pour un événement Ω' quasi-certain : $i(\Omega') = 0$.
(ii) Si A et l'événement contraire $\overline{A}$ sont équiprobables, alors $i(A) = 1$.
(iii) Si A et B sont indépendants pour la probabilité P et si $P(A \cap B) \neq 0$, alors $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$.

I.4°) Préciser $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$ quand les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants et $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$.
En déduire une nouvelle démonstration de I.2°).

I.5°) Soit A et B deux événements tels que $A \subset B$ et $P(A) \neq 0$. Comparer $i(A)$ et $i(B)$.

I.6°) Que vaut $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x)$ et quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

Partie II *Incertitude d'une variable aléatoire discrète*

II.1°) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée dans le tableau suivant :

Y \ X	1	2	3
1	0	1/3	1/3
2	1/6	0	0
3	1/6	0	0

Ainsi par exemple $P(Y = 1 \cap X = 2) = \dfrac{1}{3}$.

Déterminer la loi de X, son espérance $E(X)$ et $H(X)$.
Déterminer la loi de Y, son espérance $E(Y)$ et $H(Y)$.

II.2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U_n une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que : pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $P(U_n = k) = \dfrac{1}{n}$.
Que vaut $H(U_n)$?

II.3°) Vérifier que h est continue et positive sur $[0, 1]$.
Est-elle dérivable en 0 ? Étudier h et dessiner sa courbe représentative .

II.4°) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini.
Montrer que $H(X) \geqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, X est quasi-certaine.

II.5°) Pour $x \in [0, 1]$, on pose $h_2(x) = h(x) + h(1 - x)$.

a) Étudier h_2, vérifier que h_2 admet sur $[0, 1]$ un maximum que l'on précisera et donner le graphe de h_2.

b) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Montrer que $H(X) \leqslant 1$ avec égalité si, et seulement si, $p = 1/2$.

II.6°) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et soit X une variable aléatoire discrète. On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $p_k = P(X = x_k) > 0$.

a) Montrer, en étudiant $u \mapsto u - 1 - \ln(u)$, que :

$$\text{pour tout } u > 0, \quad \ln(u) \leqslant u - 1 \tag{1}$$

et que $\ln(u) = u - 1$ si, et seulement si, $u = 1$.

b) En utilisant (1) pour les $\dfrac{1}{np_k}$, montrer que :
$H(X) \leqslant \ln(n)/\ln(2)$ avec égalité si, et seulement si, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $P(X = x_k) = 1/n$.

II.7°) Soit $p \in]0, 1[$ et G une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
On pose $m = E(G)$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = P(G = k)$.

a) Rappeler la valeur de m, montrer que $H(G)$ existe et la calculer.

b) Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $E(X) = m$ et $H(X)$ existe.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_k = P(X = k)$ et on supposera $q_k > 0$.
En utilisant (1) vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
$q_k \ln(p) + (k - 1)q_k \ln(1 - p) - q_k \ln(q_k) \leqslant p_k - q_k$
et établir : $H(X) \leqslant H(G)$ avec égalité si, et seulement si, X suit la même loi que G.

Partie III *Incertitude d'une variable aléatoire continue*

oubli du texte original : on prolonge h par $h(0) = 0$ et pout tout $x > 0, h(x) = -x\ln(x)/\ln(2)$

Pour une variable aléatoire X admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, on dit que X admet une *incertitude* quand l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(x))\mathrm{d}x$ converge.

Dans ce cas, la valeur de l'intégrale $H(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(x))\mathrm{d}x$ est appelée *incertitude* de X.

III.1°) *Cas des lois normales*

a) Soit Y_0 une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
Montrer que $H(Y_0)$ existe et calculer $H(Y_0)$.

b) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma > 0$.
Montrer que $H(Y)$ existe et calculer $H(Y)$.

III.2°) Soit $\lambda > 0$ et X_0 une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On désignera par f_0 la densité de X_0.

a) Montrer que $H(X_0)$ existe et calculer $H(X_0)$ en fonction de λ.

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, admettant une densité f. On suppose que $H(X)$ existe et que X admet une espérance égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.
Montrer que :

$$H(X_0) = -\frac{1}{\ln(2)}\int_0^{+\infty} f(x)\ \ln(f_0(x))\mathrm{d}x$$

En utilisant (1) montrer que $H(X) \leqslant H(X_0)$.