BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : ESSEC

OPTION LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

EPREUVE ENS B/L

MATHEMATIQUES

Lundi 16 mai 2005, de 14 h. à 18 h.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.

EXERCICE

On considère un espace vectoriel réel E de dimension 2. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Un endomorphisme f de E est dit *cyclique d'ordre* n s'il existe une famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de vecteurs distincts de E, qui engendre E et tels que $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \ldots, f(x_{n-1}) = x_n, f(x_n) = x_1$. On dit alors que $(x_1, \ldots, x_n)$ est un cycle d'ordre n pour f.

1. Un exemple.

Dans cette question, l'endomorphisme f est défini par

$$\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 \end{cases}$$

Déterminer un cycle de f de premier vecteur $x_1 = -e_1 + e_2$. Quel est son ordre ?

On revient désormais au cas général ; on suppose que f est cyclique d'ordre n et que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un cycle d'ordre n de f.

2. Montrer que deux vecteurs consécutifs du cycle forment une base de E.

3. Pour tout entier naturel m, on définit f^m par récurrence : $f^0 = Id$, où Id représente l'endomorphisme identité de E et pour tout $k \geqslant 1$, $f^k = f^{k-1} \circ f$.

a) Montrer que $f^n = Id$.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : ESSEC

OPTION LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

Filière B/L

MATHEMATIQUES

Lundi 16 mai 2005, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.

EXERCICE

On considère un espace vectoriel réel E de dimension 2. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Un endomorphisme f de E est dit *cyclique d'ordre* n s'il existe une famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de vecteurs distincts de E, qui engendre E et tels que $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \ldots, f(x_{n-1}) = x_n, f(x_n) = x_1$. On dit alors que $(x_1, \ldots, x_n)$ est un cycle d'ordre n pour f.

1. Un exemple.

Dans cette question, l'endomorphisme f est défini par

$$\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 \end{cases}$$

Déterminer un cycle de f de premier vecteur $x_1 = -e_1 + e_2$. Quel est son ordre ?

On revient désormais au cas général ; on suppose que f est cyclique d'ordre n et que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un cycle d'ordre n de f.

2. Montrer que deux vecteurs consécutifs du cycle forment une base de E.

3. Pour tout entier naturel m, on définit f^m par récurrence : $f^0 = Id$, où Id représente l'endomorphisme identité de E et pour tout $k \geqslant 1$, $f^k = f^{k-1} \circ f$.

a) Montrer que $f^n = Id$.

b) Montrer que si m est un entier tel que $0 < m < n$, alors $f^m \neq Id$.

4. Soit x un vecteur non nul de E, qui n'est pas un vecteur propre de f. Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est un cycle d'ordre n de f.

5. Peut-il exister un scalaire λ tel que $f = \lambda Id$?

6. a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice associée à f s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

b) Montrer que $f^2 = aId + bf$.

7. Montrer que les valeurs propres de f sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - bx - a$.

8. En utilisant la question 3, montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $\lambda^n = 1$.

9. a) On suppose que le polynôme P admet deux racines réelles distinctes. Caractériser f.

b) Exprimer, pour tout entier $k \geqslant 1$, f^k en fonction de f et Id.

10. Montrer que le polynôme P ne peut admettre admet une unique racine réelle.

11. On suppose dans cette question que P admet deux racines complexes.

a) Montrer que ces racines sont de la forme $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, avec $\theta = \dfrac{2k_0\pi}{n}$, et k_0 un entier de $[\![0, n-1]\!]$.

b) Montrer que $f^2 = 2\cos\theta f - Id$.

c) Exprimer, pour tout entier naturel m, f^m en fonction de f et Id.

PROBLÈME

Dans ce problème, les variables aléatoires sont toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si X est une variable aléatoire réelle, $E(X)$ désigne son espérance.

Lorsque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles, on pose, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

On admet le résultat suivant (appelé théorème de transfert) :

- si X est une variable aléatoire discrète, et si g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par X, alors $E(g(X)) = \sum_{x\in\Omega} g(x)P(X = x)$, lorsque cette somme existe.

Partie I

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de même loi, admettant une espérance m. Énoncer, *avec précision*, la loi faible des grands nombres pour une suite de variables aléatoires (X_n).

2. Soit δ un réel strictement positif et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que l'intervalle $]m - \delta, m + \delta[$ soit inclus dans le complémentaire de A. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \in A\right)$$

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$, et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On rappelle que $P(X=1) = p,\ P(X=0) = 1-p = q$.

Soit s un réel donné. On définit une variable aléatoire Y par, pour tout $\omega \in \Omega$

$$Y(\omega) = e^{sX(\omega)}$$

où e représente la fonction exponentielle. Par abus de notation, on pose $Y = e^{sX}$.

1. a) Montrer que pour tout s réel, la variable aléatoire e^{sX} admet une espérance $E(e^{sX})$.

b) Déterminer la fonction $\varphi : s \longmapsto E(e^{sX})$.

2. a) Préciser la loi de S_n.

b) Déterminer $\frac{S_n}{n}(\Omega)$ et la loi de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.

c) Soit s réel. Montrer que $E(e^{s\frac{S_n}{n}}) = (\varphi(s/n))^n$.

Soit a un réel fixé de $]0,1[$.

3. a) On note $K_a = \{k \in [\![0,n]\!] \mid k/n \geqslant a\}$. Soit s un réel positif. Montrer que

$$E(e^{s\frac{S_n}{n}}) \geqslant \sum_{k\in K_a} e^{s\frac{k}{n}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \geqslant e^{as} P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right)$$

b) Montrer que, pour tout $s \geqslant 0$

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant (\varphi(s/n))^n e^{-as}$$

4. On suppose dans cette question que $a > p$.

a) Étudier sur $\mathbb{R}^+$ les variations de la fonction ℓ_a définie par

$$\ell_a : s \longmapsto as - \ln \varphi(s)$$

b) Montrer que la fonction ℓ_a atteint sur $\mathbb{R}^+$ un maximum strictement positif $h(a,p)$ que l'on calculera en fonction de a et p.

c) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant e^{-n(\sup\limits_{t>0}(at - \ln\varphi(t))} = e^{-nh(a,p)}$$

5. On suppose dans cette question que $a < p$ (donc $1-a > 1-p$).

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $n - S_n$.

b) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a\right) \leqslant e^{-n(\sup\limits_{t<0}(at - \ln\varphi(t))} = e^{-nh(1-a,1-p)} = e^{-nh(a,p)}$$

6. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Déduire des questions précédentes que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-nH(p,\varepsilon)}$$

avec $H(p,\varepsilon) = \min(h(p-\varepsilon,p), h(p+\varepsilon,p))$

b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$.

7. Une entreprise souhaite acquérir une machine qui fabrique un certain type d'objets et qui, en fonctionnement normal, produit une proportion p, $(0 < p < 1)$, d'objets défectueux. Le directeur veut connaître la valeur de p. Pour cela il teste la machine et prélève un échantillon de n, $(n \geqslant 1)$, objets qu'il analyse.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ième objet prélevé est défectueux} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose que dans les conditions de prélèvement, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

a) Montrer que $F_n = \frac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais de p.

b) Calculer le risque quadratique $r_n = E((F_n - p))^2$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} r_n$.

8. Soit α un réel de $]0, 1[$. On souhaite déterminer dans cette question un intervalle de confiance du paramètre p inconnu, au niveau de confiance $1 - \alpha$, à partir de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Quelle est la limite en loi de la suite $\left(\sqrt{n}\frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)_n$?

b) Soit f_n la réalisation de F_n sur l'échantillon considéré. Soit t_α le réel défini par $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite.
Montrer qu'un intervalle de confiance de p au niveau $1 - \alpha$ est donné par $[U_n, V_n]$ tel que

$$P(U_n \leqslant p \leqslant V_n) \geqslant 1 - \alpha$$

avec

$$U_n = f_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}, \quad V_n = f_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}$$

9. a) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que la suite $\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right)_n$ ne tend pas vers m si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $n' \geqslant n$ tel que

$$\left|\frac{S_{n'}(\omega)}{n'} - m\right| > \frac{1}{k}$$

b) Montrer que

$$P\left(\bigcup_{n' \geqslant n}\left(\left|\frac{S_{n'}(\omega)}{n'} - m\right| > \frac{1}{k}\right)\right) \leqslant 2\frac{e^{-nH(m,1/k)}}{1 - e^{-H(m,1/k)}}$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $A_k = \{\omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists n' \geqslant n \text{ tel que } \left|\frac{S_{n'}(\omega)}{n'} - m\right| > \frac{1}{k}\}$.
Montrer que $P(A_k) = 0$.
En déduire que

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} \neq m\right\}\right) = 0$$